Zerazione, pseudoordinamento e numeri Escheriani

Cesco Reale
Festival Italiano di Giochi Matematici
cescoreale@gmail.com

August 31, 2010

Sommario

Osservando le relazioni esistenti tra le operazioni elementari di somma, prodotto (iterazione di somme) ed elevamento a potenza (iterazione di prodotti), viene definita una nuova operazione (denominata *zerazione*) coerente con queste leggi e tale che la somma risulti un'iterazione di zerazioni. La zerazione risulta coerente con la funzione di Ackermann. Definita l'operazione inversa della zerazione (denominata *antizerazione*), si osserva che essa non è chiusa su $\mathbb{R}$. Viene definito così un nuovo insieme numerico (denominato E, *numeri escheriani*) che consenta di chiudere l'antizerazione su $\mathbb{R}$. Definita la nozione di pseudoordinamento, vengono analizzate l'addizione e la moltiplicazione su E, e si trova una corrispondenza tra E e $\mathbb{C}$. Si estende infine la zerazione a $\mathbb{C}$, in maniera che l'antizerazione sia chiusa anche su $\mathbb{C}$.

1 Relazioni tra le operazioni

Dati $m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$, definiamo ${}_n(a\circ)$ come $\quad a \circ (a \circ (a ... \circ a)) \quad n$ volte (cioè dove a compare n volte). Dato $a \circ b = c$, definiamo operazione inversa destra quella che, dati c ed a, consente di ottenere b, e operazione inversa sinistra quella che, dati c e b, consente di ottenere a. Definiamo:

$a \circ_1 b$ (che chiamiamo a composto b con l'operazione di grado 1) come $a + b$;
$a \circ_2 b$ (a composto b con l'operazione di grado 2) come $a \cdot b$;
$a \circ_3 b$ (a composto b con l'operazione di grado 3) come a^b;
$a \circ_1^{-1} b$ (a composto b con l'operazione inversa destra di grado 1) come $a - b$;
$a \quad {}^{-1}\circ_1 b$ (a composto b con l'operaz. inversa sinistra di grado 1) come $a - b$;
$a \circ_2^{-1} b$ (a composto b con l'operazione inversa destra di grado 2) come a/b;
$a \quad {}^{-1}\circ_2 b$ (a composto b con l'operaz. inversa sinistra di grado 2) come a/b;
$a \circ_3^{-1} b$ (a composto b con l'operazione inversa destra di grado 3) come $\log_b a$;
$a \quad {}^{-1}\circ_3 b$ (a composto b con l'operaz. inversa sinistra di grado 3) come $\sqrt[b]{a}$.

In generale leggiamo $a \circ_m b$ come a composto b con l'operazione di grado m, dove il grado dell'operazione è definito ricorsivamente dalla sottostante relazione 1). Possiamo constatare che le operazioni elementari di prodotto ed elevamento a potenza sono derivate dalla somma soddisfacendo le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad {}_n(a\circ_m) = a \circ_{m+1} n \\
&2a) \quad {}_n(a\circ_m) = a \circ_m [{}_{n-1}(a\circ_m)] \\
&2b) \quad {}_n(a\circ_m) = [{}_{n+1}(a\circ_m)] \circ_m^{-1} a
\end{aligned}
$$

dove la 2a) discende dalla definizione di ${}_n(a\circ)$. Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
&1.1) \quad {}_3(7\circ_1) = {}_3(7+) = 7 + (7+7) = 7 \cdot 3 = 7 \circ_2 3 \\
&1.2) \quad {}_3(7\circ_2) = {}_3(7\cdot) = 7 \cdot (7 \cdot 7) = 7^3 = 7 \circ_3 3 \\
&2a.1) \quad {}_3(7\circ_1) = {}_3(7+) = 7 + (7+7) = 7 + {}_2(7+) = 7 \circ_1 [{}_2(7\circ_1)] \\
&2a.2) \quad {}_4(7\circ_2) = {}_4(7\cdot) = 7 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot {}_3(7\cdot) = 7 \circ_2 [{}_3(7\circ_2)] \\
&2b.1) \quad {}_2(7\circ_1) = {}_2(7+) = 7 + 7 = 7 + (7+7) - 7 = {}_3(7+) - 7 = [{}_3(7\circ_1)] \circ_1^{-1} 7 \\
&2b.2) \quad {}_3(7\circ_2) = {}_3(7\cdot) = 7 \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot (7 \cdot (7 \cdot 7)) \div 7 = {}_4(7\cdot) \div 7 = [{}_4(7\circ_2)] \circ_2^{-1} 7
\end{aligned}
$$

2 Operazione di grado 0

Ci chiediamo ora se esista e come si possa definire una operazione di grado 0 che soddisfi le precedenti relazioni. La rappresenteremo con un'operatore $\bigtriangledown$ (Nabla) tale che:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad {}_n(a\circ_0) = {}_n(a\bigtriangledown) = a + n = a \circ_1 n \\
&2a) \quad {}_n(a\circ_0) = {}_n(a\bigtriangledown) = a \bigtriangledown [{}_{n-1}(a\bigtriangledown)] = a \circ_0 [{}_{n-1}(a\circ_0)]
\end{aligned}
$$

(Nota: il Nabla è stato introdotto nel 1853 da William Hamilton, il quale ha creato questo simbolo semplicemente rovesciando un Delta maiuscolo; in seguito Heaviside l'ha chiamato Nabla, parola greca di origine fenicia che indica l'arpa fenicia, perchè la forma del simbolo ricorda questo strumento musicale simile alla lira).

Se definiamo l'operatore Nabla commutativo, l'unica definizione che soddisfa le precedenti relazioni è quella di Rubtsov (http://numbers.newmail.ru/):

$$
\begin{aligned}
3) \quad & a \bigtriangledown b = a + 1 \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad a > b \\
& a \bigtriangledown b = b + 1 \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad a < b \\
& a \bigtriangledown b = a + 2 = b + 2 \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad a = b
\end{aligned}
$$

Infatti dalla 1 abbiamo $a \bigtriangledown a = a + 2$ e $a \bigtriangledown (a \bigtriangledown a) = a \bigtriangledown (a+2) = a + 3 = (a+2) + 1$, e quindi il risultato è il successore del maggiore, sempre tranne che per $a = b$. Questa definizione ha infatti un problema: la sua estensione a $\mathbb{R}$ non è continua in $a = b$. Questo perché la relazione 1) ${}_n(a\circ_0) = {}_n(a\bigtriangledown) = a + n = a \circ_1 n$ ha un'incoerenza per $n = 1$; infatti per $n = 1$ si ha ${}_1(a\bigtriangledown) = a + 1$, ma per $m = 1, 2, 3$ ${}_1(a\circ_m) = a$, quindi, estendendo questa proprietà anche al caso $m = 0$, e in generale al caso $m \in \mathbb{Z}$, segue $a = a + 1$, assurdo.

Per risolvere questo problema bisognerebbe cambiare la 1 in modo da avere ${}_1(a\bigtriangledown) = a$, quindi ${}_n(a\circ_0) = {}_n(a\bigtriangledown) = (a+n) - 1 = (a \circ_1 n) \;{}^{-1}\circ_1 1$ e in generale la relazione 1 dovrebbe essere ${}_n(a\circ_m) = (a \circ_{m+1} n) \;{}^{-1}\circ_{m+1} 1$. Ora, possiamo facilmente constatare che questa relazione, oltre a risolvere il problema per l'operazione di grado 0, è verificata anche per le operazioni elementari di partenza. Infatti: ${}_n(a+) = (a \cdot n)/1 = a \cdot n$, ${}_n(a\cdot) = \sqrt[1]{a^n} = a^n$. Sostituiamo allora la 1) ${}_n(a\circ_m) = a\circ_{m+1} n$ con la $1')$ ${}_n(a\circ_m) = (a\circ_{m+1} n) \quad {}^{-1}\circ_{m+1} 1$. La 2a e la 2b non vengono influenzate da questo cambiamento. Nota: dal terzo grado in poi, le operazioni perdono la commutatività, hanno quindi due inverse e hanno elemento neutro (1) solo a destra; di conseguenza tra le due inverse solo quella sinistra ha elemento neutro; se nella relazione 1') avessimo considerato l'inversa destra, tale relazione non sarebbe stata valida per $m > 2$; ad esempio, nel caso della potenza (operazione di terzo grado) tra radice e logaritmo abbiamo considerato la radice. Le relazioni da soddisfare per l'operatore Nabla sono ora:

$$1') \quad {}_n(a\circ_m) = (a \circ_{m+1} n) \quad {}^{-1} \circ_{m+1} 1$$
$$2a) \quad {}_n(a\circ_0) = {}_n(a\bigtriangledown) = a \bigtriangledown [{}_{n-1}(a\bigtriangledown)] = a \circ_0 [{}_{n-1}(a\circ_0)]$$

Se, come prima, definiamo l'operatore Nabla commutativo, l'unica definizione che soddisfa le precedenti relazioni è adesso la seguente:

$$4) \quad a \bigtriangledown b = a + 1 \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad a \geq b$$
$$a \bigtriangledown b = b + 1 \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{se} \quad a \leq b$$

che è l'operazione *successore del maggiore* e che definiremo *zerazione*. Questa operazione può essere banalmente estesa ai numeri reali. L'operatore Nabla è commutativo per definizione (se l'avessimo definito non commutativo, avremmo avuto l'operazione *successore del primo elemento* oppure l'operazione *successore del secondo elemento*, entrambe poco interessanti). Esso è non associativo, distributivo rispetto alla somma (ma non rispetto al prodotto, né all'elevamento a potenza) e inoltre non ha elemento neutro. Ricordiamo che in assenza di parentesi vengono effettuate prima le operazioni di grado maggiore, quindi la somma è prioritaria sulla zerazione. Non-associatività: dati ad esempio, $a < b < c{-}1 \in \mathbb{R}$ abbiamo che $(a\bigtriangledown b)\bigtriangledown c = b{+}1\bigtriangledown c = c{+}1 \neq a\bigtriangledown(b\bigtriangledown c) = a\bigtriangledown c{+}1 = c{+}2$. Distributività rispetto alla somma: dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, abbiamo $(a \bigtriangledown b) + c = a + c \bigtriangledown b + c$.

3 Funzione di Ackermann

Si puó notare che questa definizione é coerente con la funzione di Ackermann. La funzione di Ackermann é una zerazione ricorsiva a due variabili, cosí definita:

$$5) \quad A(0, n) = n + 1 \quad \mathbb{N} \ni n \geq 0,$$
$$A(m, 0) = A(m - 1, 1) \quad \mathbb{N} \ni m \geq 1$$
$$A(m, n) = A[m - 1, A(m, n - 1)] \quad \mathbb{N} \ni m \geq 1, \quad \mathbb{N} \ni n \geq 1$$

Da qui si ricava: $A(0, n) = n + 1$, $A(1, n) = n + 2$, $A(2, n) = 2n + 3$, $A(3, n) = 2^{(n+3)} - 3$.

n	0	1	2	3	4	5	...
$A(0, n) = n + 1$	1	2	3	4	5	6	...
$A(1, n) = n + 2$	2	3	4	5	6	7	...
$A(2, n) = 2 \cdot n + 3$	3	5	7	9	11	13	...
$A(3, n) = 2^{(n+3)} - 3$	5	13	29	61	125	253	...

Essa é il piú semplice controesempio, dato nel 1928 da Wilhelm Ackermann, di una funzione totale (definita per ogni elemento d'ingresso), ben definita (univoca) e computabile (implementabile con un algoritmo), ma non primitiva ricorsiva (implementabile a partire da un determinato insieme di funzioni elementari di base). Definiamo ora una funzione di Ackermann modificata, che evidenzi le proprietá che ci interessano:

$$
\begin{aligned}
6) \quad & A'(0,n) = n+1 \quad \mathbb{N} \ni n \geq 3, \\
& A'(m,3) = A'(m-1,4) \quad \mathbb{N} \ni m \geq 1 \\
& A'(m,n) = A'[m-1, A'(m,n-1)] \quad \mathbb{N} \ni m \geq 1, \quad \mathbb{N} \ni n \geq 4
\end{aligned}
$$

Da qui abbiamo: $A'(0,n) = 1+n$, $A'(1,n) = 2+n$, $A'(2,n) = 2 \cdot n$, $A'(3,n) = 2^n$. In generale: $A'(m,n) = 2 \circ_m n$, e quindi, in particolare, $A'(0,n) = 2 \bigtriangleup n$.

n	3	4	5	6	7	8	...
$A'(0,n) = 2 \bigtriangledown n$	4	5	6	7	8	9	...
$A'(1,n) = 2+n$	5	6	7	8	9	10	...
$A'(2,n) = 2 \cdot n$	6	8	10	12	14	16	...
$A'(3,n) = 2^n$	8	16	32	64	128	256	...

Notiamo per inciso che dalla funzione di Ackermann ricaviamo: $2 \circ_m 4 = 2 \circ_{m+1} 3$, con $\mathbb{N} \ni m \geq 0$, dove le operazioni per $m > 3$ sono definite con parentesi a destra (in accordo alla 2a): ${}_3(a \circ_m) = a \circ_m (a \circ_m a)$. Inoltre, $(2 \circ_m 2) \circ_{m+1} 1 = 4$, con $\mathbb{N} \ni m \geq 0$.

4 Operazione inversa dell'operazione di grado 0

Analizziamo ora l'operazione inversa di grado 0, che chiameremo *antizerazione*, e rappresenteremo con il simbolo $\bigtriangleup$ (Delta), analogamente alla scelta di Rubtsov.

Possiamo constatare che:

$$
\begin{aligned}
7) \quad & c \bigtriangleup a = c-1 \quad a,c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a < c-1 \\
& c \bigtriangleup a = (-\infty, c-1] \quad a,c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a = c-1 \\
& c \bigtriangleup a = \nexists \quad a,c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a > c-1
\end{aligned}
$$

Nel caso $a < c-1$ essa coincide con l'operazione *predecessore del maggiore*. Nel caso $a = c-1$ essa e' indeterminata in un intervallo. Nel caso $a > c-1$ non esiste alcun numero reale come risultato dell'operazione.

5 Estensioni degli insiemi numerici

Le estensioni dei numeri naturali $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ derivano tutte da una stessa esigenza. Quella di trovare insiemi numerici su cui siano chiuse le inverse delle operazioni di somma, prodotto e potenza. Ad esempio, quando definiamo la sottrazione, operazione inversa della somma, scopriamo che essa non é sempre definita. In particolare, dato che in $a + b = c \quad c \geq a, b \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$, quando analizzo $c - b = a$ trovo che per $b > c \quad \nexists \quad a \in \mathbb{N}$ che soddisfi la precedente relazione. Dunque la sottrazione non é chiusa su $\mathbb{N}$. Abbiamo una serie di espressioni per ora prive di significato: 0-1, 1-2, 2-3, 0-2, 1-3, ecc. Sappiamo peró che 1-0 = 2-1 = 3-2, ecc., cioè se sommo una stessa quantità a c e a b, il risultato dell'operazione $c - b$ non cambia. Per rispettare questa proprietá, raggruppiamo le nostre espressioni in opportune classi di equivalenza, e chiamiamo -1 l'insieme delle espressioni 0-1, 1-2, 2-3,..., chiamiamo -2 l'insieme delle espressioni 0-2, 1-3, 2-4,..., e cosí via. Definiamo in questo modo $\mathbb{Z}$, un ampliamento di $\mathbb{N}$ su cui é chiusa anche la sottrazione. Analogamente dalla divisione otteniamo $\mathbb{Q}$ e da radice e logaritmo otteniamo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ (in realtá in questa maniera non si ottengono i trascendenti, ma questo adesso non ci interessa).

6 Definizione di un nuovo insieme numerico

Torniamo ora al Delta. Vogliamo cercare un'opportuna estensione che renda chiuso il Delta sul nuovo insieme, e che rispetti il significato del Nabla. Dobbiamo definire un b tale che $a \bigtriangledown b = c$ quando $a > c - 1$. Poiché Nabla é un operatore *successore*, per far sí che c sia, in un senso nuovo, il successore di uno degli operandi, possiamo definire b come $\varsigma(c-1)$, dove ς (stigma) é un operatore unario scelto per rappresentare questi nuovi numeri, tale che $a \bigtriangledown \varsigma(b)$ sia ora il *successore del minore* tra a e b. (Nota: lo stigma é una lettera, pronunciata [st], che nel greco antico era caduta in disuso e veniva usata solo come cifra per indicare il 6; essa è pressoché identica al sigma usato in fine di parola). Chiameremo questi numeri *stigmareali* ($\varsigma\mathbb{R}$). Con questa nuova definizione abbiamo:

$$
\begin{aligned}
8)\quad & c \bigtriangleup a = c-1 \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a < c-1 \\
& c \bigtriangleup a = (-\infty, c-1] \cup [\varsigma(c-1), \varsigma\infty) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a = c-1 \\
& c \bigtriangleup a = \varsigma(c-1) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a > c-1
\end{aligned}
$$

Questa definizione equivale a fare il seguente raggruppamento in classi di equivalenza delle espressioni $c \triangle a$ con $a > c-1$: $c \triangle (c+d) = c \triangle (c+f) \quad d, f \in \mathbb{R}$ e $d, f > -1$, in analogia al caso $a < c-1$, dove $c \triangle (c+d) = c \triangle (c+f) \quad d, f \in \mathbb{R}$ e $d, f < -1$. Per rendere la definizione univoca, nel caso $a = c - 1$ all'interno dell'insieme $(-\infty, c-1] \cup [\varsigma(c-1), \varsigma\infty)$ scegliamo come valore principale $c - 1$, analogamente a come si sceglie $\arcsin 0 = 0$ all'interno dell'insieme $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. In seguito ripeteremo varie volte questa operazione: restringeremo un insieme di risultati ad un solo risultato (che chiameremo appunto *valore principale*) per rendere la funzione univoca. Abbiamo così:

$$
\begin{aligned}
8.1)\quad & c \bigtriangleup a = c-1 \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \leq c-1 \\
& c \bigtriangleup a = \varsigma(c-1) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a > c-1
\end{aligned}
$$

Mantendendo la commutatività, ridefiniamo ora piú precisamente la zerazione nella maniera seguente:

$$
\begin{aligned}
9)\quad & a \bigtriangledown b = b \bigtriangledown a = \{a+1, \varsigma a+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \geq b \\
& a \bigtriangledown b = b \bigtriangledown a = \{b+1, \varsigma b+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \leq b \\
& a \bigtriangledown \varsigma b = \varsigma b \bigtriangledown a = \{\varsigma b+1, b+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \geq b \\
& a \bigtriangledown \varsigma b = \varsigma b \bigtriangledown a = \{a+1, \varsigma a+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \leq b
\end{aligned}
$$

Ovverosia, definiamo come risultato della zerazione sempre due valori, uno è il successore di un reale e l'altro è il successore di uno stigmareale. Il valore principale è il primo dei due valori mostrati nella 9), ed è il successore dell'operando scelto. Possiamo dunque asserire che aggiungere un operatore stigma inverte la scelta dell'operando di cui fare il successore. In questo modo possiamo definire anche :

$$
\begin{aligned}
9.1)\quad & \varsigma a \bigtriangledown \varsigma b = \varsigma b \bigtriangledown \varsigma a = \{\varsigma a+1, a+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \geq b \\
& \varsigma a \bigtriangledown \varsigma b = \varsigma b \bigtriangledown \varsigma a = \{\varsigma b+1, b+1\} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \leq b
\end{aligned}
$$

$$
9.2)\quad \varsigma(\varsigma a) = a
$$

7 Pseudoordinamento e numeri escheriani

Per rendere il Delta chiuso sul nuovo insieme numerico bisogna ancora definire $\varsigma c \bigtriangleup a$ e $\varsigma c \bigtriangleup \varsigma a$, oltre che $\bigtriangledown$ e $\bigtriangleup$ in $\mathbb{R} \cup \varsigma\mathbb{R}$. Prima di ciò, definiamo la relazione $\succ, \prec$ che chiameremo *pseudomaggiore*, *pseudominore* e che tra reali coincide con *maggiore*, *minore*. Estendiamo la definizione dell'operatore Nabla da *successore del maggiore* (in $\mathbb{R}$) a *successore dello pseudomaggiore* (in $\mathbb{R} \cup \varsigma\mathbb{R}$); dato $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), abbiamo $\varsigma a \bigtriangledown b = \varsigma a + 1$, ed essendo $\varsigma a + 1$ successore di ςa definiamo $\varsigma a \succ b$. Invece, $a > b \Rightarrow \varsigma a \prec b$. Inoltre $a < b \Rightarrow \varsigma a \prec \varsigma b$, in quanto $\varsigma a \bigtriangledown \varsigma b = \varsigma b + 1$, dunque lo pseudomaggiore è ςb. Quindi, dato $a < b$, troviamo che $a \prec b \prec \varsigma a \prec \varsigma b \prec a$. Si può notare che esistono infinite n-uple di numeri in $\mathbb{R} \cup \varsigma\mathbb{R}$, per le quali $p_1 \prec p_2 \prec ... \prec p_n \prec p_1$. Questo ricorda alcune litografie di Escher, come *Cascata* e *Salita e discesa*, che sfruttano l'illusione ottica del triangolo di Penrose. Perciò ho chiamato l'insieme $\mathbb{R} \cup \varsigma\mathbb{R}$ *numeri escheriani* (E). Inoltre ho chiamato *escherità* la suddetta proprietà delle n-uple senza massimo. Questo pseudoordinamento è dunque riflessivo, antisimmetrico e non transitivo.

Possiamo ora riscrivere la definizione di zerazione in maniera compatta, sfruttando la nozione di pseudoordinamento:

$$
\begin{aligned}
10)\quad & x \bigtriangledown y = \{x+1, \varsigma x+1\} \quad x,y \in E \quad \text{se} \quad x \succeq y \\
& x \bigtriangledown y = \{y+1, \varsigma y+1\} \quad x,y \in E \quad \text{se} \quad x \preceq y
\end{aligned}
$$

dove dei due risultati il valore principale è il successore dello pseudomaggiore (rispettivamente $x+1$ e $y+1$ nei due casi della 10), dunque se lo pseudomaggiore è reale il valore principale è il successore di un reale, e se lo pseudomaggiore è stigmareale il valore principale è il successore di uno stigmareale. Nel caso $a \bigtriangledown \varsigma a$, definiamo come valore principale quello reale, e quindi $a \succ \varsigma a$.

8 Antizerazione in E

Torniamo ora al Delta. Analizziamo $c \bigtriangleup \varsigma a$.

$$\begin{aligned} 11)\quad & c \bigtriangleup \varsigma a = \varsigma(c-1) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a < c-1 \\ & c \bigtriangleup \varsigma a = (-\infty, c-1] \cup [\varsigma(c-1), \varsigma\infty) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a = c-1 \\ & c \bigtriangleup \varsigma a = c-1 \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a > c-1 \end{aligned}$$

Anche in questo caso la rendiamo univoca, ponendo:

$$\begin{aligned} 11.1)\quad & c \bigtriangleup \varsigma a = \varsigma(c-1) \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a \leq c-1 \\ & c \bigtriangleup \varsigma a = c-1 \quad a, c \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad a > c-1 \end{aligned}$$

9 Addizione tra Escheriani

Cerchiamo ora di capire come funziona l'addizione in E. Volendo estendere la distributività della zerazione anche ai numeri stigma, dati ad esempio $a < b < c \in \mathbb{R}$ (negli altri casi si ottiene comunque la 12) , troviamo $(a \bigtriangledown \varsigma b) + c = a + c \bigtriangledown \varsigma b + c$. Ora, il primo membro è uguale a $a + 1 + c$, e nel secondo membro compare $\varsigma b + c$, ma non sappiamo come si sommano reali e stigmareali; se poniamo $\varsigma b + c = \varsigma(b + c)$, il secondo membro diventa uguale al primo. Inoltre troviamo: $(a \bigtriangledown \varsigma b) + \varsigma c = a + \varsigma c \bigtriangledown \varsigma b + \varsigma c$, che, in base a quanto appena detto, e mantenendo l'addizione commutativa, diventa: $\varsigma(a + 1 + c) = \varsigma(a + c) \bigtriangledown \varsigma b + \varsigma c$. Affinché quest'espressione sia valida, deve risultare $\varsigma b + \varsigma c = b + c$. Riassumendo, definiamo l'addizione in $\mathbb{R} \cup \varsigma\mathbb{R}$ in questa maniera:

$$\begin{aligned} 12)\quad & a + \varsigma b = \varsigma b + a = \varsigma(a + b) \quad a, b \in \mathbb{R} \\ & \varsigma a + \varsigma b = \varsigma b + \varsigma a = a + b \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

10 Chiusura dell'antizerazione in E

Tornando al problema di rendere chiuso il Delta su tutto E, possiamo farlo in una maniera molto semplice: basta riprendere la 8.1) e la 11.1) e considerarle valide anche quando il primo operando è stigmareale. Analogamente all'operatore unario *modulo* che elimina il segno -, definiamo ora l'operatore unario *stigmamodulo* di a ($\nmid a \nmid$) che elimina il segno stigma, cioé l'eventuale presenza dell'operatore Stigma: $\nmid a \nmid = \nmid \varsigma a \nmid = a$. Ridefiniamo a questo punto l'antizerazione in maniera piú compatta:

$$\begin{aligned} 13)\quad & c \bigtriangleup a = \nmid a + c - 1 \nmid \, -a \quad a, c \in E \quad \text{se} \quad \nmid a \nmid \leq \nmid c - 1 \nmid \\ & c \bigtriangleup a = \nmid a + c - 1 \nmid \, -\varsigma a \quad a, c \in E \quad \text{se} \quad \nmid a \nmid > \nmid c - 1 \nmid \end{aligned}$$

11 Parallelismi tra formule

Osserviamo che la 12) risulta in perfetta analogia con $a \cdot (-b) = (-b) \cdot a = -(a \cdot b)$ e $-a \cdot (-b) = -b \cdot (-a) = a \cdot b$. In pratica basta alzare ogni operatore di un grado: $\bigtriangledown$ diventa $+$, $+$ diventa $\cdot$, e l'operatore unario ς diventa l'operatore unario $-$

(quello con cui distinguiamo $+a$ e $-a$, e che è diverso dall'operatore binario $-$ che ci consente di fare $c - a = b$).

Possiamo constatare che in molti casi alzando o abbassando il grado m degli operatori di una formula, essa resta valida. Abbiamo visto un esempio sull'addizione, analizzeremo ora altri esempi, e questo ci sarà utile nel prossimo paragrafo per studiare la moltiplicazione in E. Consideriamo $k, m \in \mathbb{N},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Somma di k termini consecutivi di una progressione aritmetica e prodotto di k termini consecutivi di una progressione geometrica:

$$
\begin{aligned}
&14.0)\quad a_1 \circ_m a_2 \circ_m \ldots \circ_m a_k = (a_1 \circ_m a_k) \circ_{m+1} k \quad {}^{-1}\circ_{m+1} 2 \\
&14.1)\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_k = (a_1 + a_k) \cdot k/2 \\
&14.2)\quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = \sqrt[2]{(a_1 \cdot a_k)^k}
\end{aligned}
$$

Alzando o abbassando ulteriormente di un grado la formula perde di validità.

Proprietà delle potenze e distributività:

$$
\begin{aligned}
&15.0)\quad a \circ_{m+1} b \circ_m c \circ_{m+1} b = (a \circ_m c) \circ_{m+1} b \\
&15.1)\quad a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b \\
&15.2)\quad a \cdot b + c \cdot b = (a + c) \cdot b \\
&15.3)\quad a + b \bigtriangledown c + b = (a \bigtriangledown c) + b
\end{aligned}
$$

Proprietà delle potenze e commutatività:

$$
\begin{aligned}
&16.0)\quad (b \circ_m c) \quad {}^{-1}\circ_m a = (b \quad {}^{-1}\circ_m a) \circ_m c \\
&16.1)\quad \sqrt[a]{b^c} = (\sqrt[a]{b})^c \\
&16.2)\quad (b \cdot c)/a = b/a \cdot c \\
&16.3)\quad (b + c) - a = (b - a) + c
\end{aligned}
$$

Vedremo nella 19) che la proprietà analoga partendo dal logaritmo (anziché dalla radice) non è generalizzabile.

Prodotto binomiale:

$$
\begin{aligned}
&17.0)\quad (a \circ_m b) \circ_{m+1} (c \circ_m d) = (a \circ_{m+1} c \circ_m a \circ_{m+1} d) \circ_m (b \circ_{m+1} c \circ_m b \circ_{m+1} d) \\
&17.1)\quad (a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \\
&17.2)\quad (a \bigtriangledown b) + (c \bigtriangledown d) = (a + c \bigtriangledown a + d) \bigtriangledown (b + c \bigtriangledown b + d)
\end{aligned}
$$

Si noti che, data la non-associatività della zerazione, nella 17.2 (e quindi anche nella 17.0) si rende necessaria l'introduzione di parentesi. Un inserimento differente farebbe decadere la vaidità della formula.

In alcuni casi lo slittamento non è perfetto, in quanto un operatore non cambia, come negli esempi seguenti. Per questa ragione in questi esempi non è possibile estrapolare una formula valida per gradi diversi. Possiamo peró osservare che questo avviene quando si opera tra due esponenti (o iper-esponenti, come nella 21, dove per iper-esponente definiamo un operando destro di un'operazione di grado maggiore o uguale a 3); quindi possiamo ipotizzare che valga in generale la legge seguente: quando un iper-esponente è il risultato di un'operazione, abbassando la formula di 1 grado quell'operatore non cambia.

Logaritmi e distributività (nel secondo membro delle prime due righe il + resta invariato):

$$
\begin{array}{ll}
18.1) & log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c \\
18.2) & (b + c)/a = b/a + c/a \\
18.3) & (b \bigtriangledown c) - a = b - a \bigtriangledown c - a
\end{array}
$$

Logaritmi e associatività-commutatività (nel secondo membro delle prime due righe il $\cdot$ resta invariato):

$$
\begin{array}{ll}
19.1) & log_a(b^c) = c \cdot log_a b \\
19.2) & (b \cdot c)/a = c \cdot b/a \\
19.3) & (b + c) - a = c + (b - a)
\end{array}
$$

Abbassando ulteriormente di un grado la formula perde di validità.

Somma di frazioni (nel secondo membro delle prime due righe $b \cdot d$ resta invariato):

$$
\begin{array}{ll}
20.1) & \sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[d]{c} = \sqrt[b \cdot d]{a^d \cdot c^b} \\
20.2) & a/b + c/d = (a \cdot d + b \cdot c)/(b \cdot d) \\
20.3) & a - b \bigtriangledown c - d = (a + d \bigtriangledown b + c) - (b + d)
\end{array}
$$

Per la prossima formula devo anticipare che indico l'operazione $\circ_4$, la tetrazione, con il simbolo $\nearrow$, visto che considero poco adatte entrambe le notazioni normalmente usate (la notazione $a \uparrow\uparrow b$ e la notazione ${}^b a$).

$$
\begin{array}{ll}
21.0) & a \ \circ_{m+2} \ b \ \circ_m \ a = a \ \circ_{m+1} \ (a \ \circ_{m+2} \ (b - 1) + a \ \circ_{m+1}^{-1} \ a) \\
21.1) & a \nearrow b \cdot a = a^{(a \nearrow (b-1) + log_a a)} \\
21.2) & a^b + a = a \cdot (a^{b-1} + a/a) \\
21.3) & a \cdot b \bigtriangledown a = a + (a \cdot (b - 1) \bigtriangledown a - a)
\end{array}
$$

Occorre notare che in tutti questi casi le formule restano valide anche con le rispettive operazioni inverse, ivi compresa l'antizerazione, anche quando compaiono numeri stigmareali. Ad esempio se nella 20.3) sostituiamo il Nabla col Delta, nell'ipotesi $c - d > a - b - 1$ otteniamo da entrambi i lati $\varsigma(a - b - 1)$. Inoltre, un'analisi dei vari casi della 21.3) mostra che essa resta valida solo se valgono le condizioni finora viste su E: ad esempio, solo se la zerazione ha due risultati, solo se il valore principale è il successore dello pseudomaggiore, solo se il Delta rispetta la 13), solo se l'addizione rispetta la 12).

12 Moltiplicazione di escheriani

Cerchiamo ora di capire come funziona la moltiplicazione con i numeri escheriani. Dalla 12) ricaviamo che da $\varsigma a \cdot b = {}_b(\varsigma a+)$ otteniamo un reale se b è pari e uno stigmareale se b è dispari, ma se b non è intero cosa succede ? Il problema è analogo al caso $(-a)^b$ con a positivo: se b è pari il risultato è positivo, se b è dispari il risultato è negativo, se b non è intero bisogna ricorrere ai numeri complessi. Proviamo allora ad analizzare la 21.3), estendendone la validità a E.

Studiamo il caso $\varsigma a \cdot b \bigtriangledown \varsigma a = \varsigma a + (\varsigma a \cdot (b-1) \bigtriangledown \varsigma a - \varsigma a)$. Si constata che questa formula è coerente con quanto discende dalla 12). Infatti dato ad esempio $a(b-1) \geq 0$ e b pari, il primo membro risulta $ab \bigtriangledown \varsigma a = \varsigma a + 1$ e il secondo risulta $\varsigma a + (\varsigma(a \cdot (b-1)) \bigtriangledown 0) = \varsigma a + 1$. Anche negli altri casi la formula resta valida.

Per analizzare la moltiplicazione con razionali, cambiamo leggermente la 21.2) nel modo seguente: dati $b, m, n \in \mathbb{Z}$, $a^b + a^{m/n} = a^{m/n} \cdot (a^{b-m/n} + a^{m/n}/a^{m/n})$; abbassando di un grado, e sostituendo a con ςa la 21.3) diventa: $\varsigma a \cdot b \bigtriangledown a \cdot m/n = \varsigma a \cdot m/n + (\varsigma a \cdot (b - m/n) \bigtriangledown a \cdot m/n - a \cdot m/n)$. Detto $b - m/n = k/n$, possiamo verificare che, affinché la formula resti valida il prodotto $\varsigma a \cdot k/n$ risulta: stigmareale $(\varsigma(ak/n))$ per k ed n dispari, reale (ak/n) per k pari ed n dispari, non definito per k dispari ed n pari. Infatti in questo terzo caso, arriviamo a una contraddizione sia nell'ipotesi $\varsigma a \cdot k/n = \varsigma(ak/n)$, sia nell'ipotesi $\varsigma a \cdot k/n = ak/n$; questo è coerente col fatto che addizionando n volte (con n pari) uno stesso numero (reale o stigmareale) il risultato è reale. Il tutto è ancora in analogia con $(-a)^b$.

Ora studiamo il caso $\varsigma a \cdot \varsigma b \bigtriangledown \varsigma a = \varsigma a + (\varsigma a \cdot (\varsigma b - 1) \bigtriangledown \varsigma a - \varsigma a)$. Analizziamo ad esempio il caso $a(b-1) \geq 0$ (tutti gli altri casi portano agli stessi risultati). Se al primo membro supponiamo $\varsigma a \cdot \varsigma b = ab$, allora al primo membro otteniamo $\varsigma a + 1$ e affinché il secondo membro sia uguale al primo deve essere $\varsigma a \cdot \varsigma(b-1) \bigtriangledown 0 = 1$, e quindi $\varsigma a \cdot \varsigma(b-1) = \varsigma(a \cdot (b-1))$. Se invece al primo membro supponiamo $\varsigma a \cdot \varsigma b = \varsigma ab$ allora al primo membro otteniamo $\varsigma ab + 1$ e affinché il secondo membro sia uguale al primo deve essere $\varsigma a \cdot \varsigma(b-1) \bigtriangledown 0 = a(b-1) + 1$, e quindi $\varsigma a \cdot \varsigma(b-1) = a \cdot (b-1)$.

22.1) $\quad \varsigma a \cdot \varsigma b = ab \Leftrightarrow \varsigma a \cdot \varsigma(b-1) = \varsigma(a \cdot (b-1))$

22.2) $\quad \varsigma a \cdot \varsigma b = \varsigma ab \Leftrightarrow \varsigma a \cdot \varsigma(b-1) = a \cdot (b-1)$

Le 22.1) e 22.2) sono quindi equivalenti: considerando il prodotto $\varsigma x \cdot \varsigma y$, un cambio di parità di $x + y$ determina un cambiamento del risultato tra xy e $\varsigma(xy)$. Non si riesce peró a ricavare se, dato $a + b$ pari, $\varsigma a \cdot \varsigma b$ risulti reale o stigmareale.

Viste le analogie con il caso $(-a)^b$, analizziamo la formula generale per l'elevamento a potenza di numeri negativi e proviamo ad abbassarla di un grado (come visto alla fine del paragrafo sui parallelismi, l'operatore unario $-$ diventa l'operatore unario ς); ricordiamo che $D(x)$ è la funzione di Dirichlet, che dà 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali; dati $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ otteniamo:

23.1) $\quad (-a)^b = a^b \cdot e^{i\pi b(2k+1)^{D(b)} \ mod \ i2\pi}$

23.2) $\quad \varsigma a \cdot b = a \cdot b + e \cdot (i\pi b(2k+1)^{D(b)} \ mod \ i2\pi) = a \cdot b + i\pi e b(2k+1)^{D(b)} \ mod \ i2\pi e$

L'asse immaginario è dunque ristretto a $[0, i2\pi e)$, e ogni valore iy esterno a questo settore è equivalente al valore principale $iy\ mod\ i2\pi e$. Questo è in perfetta analogia con quanto avviene per i logaritmi dei numeri complessi, dove la parte immaginaria del risultato è definita su $i\mathbb{R}/i2\pi$. Abbiamo dunque che $\varsigma a = a \pm i\pi e$. In particolare, troviamo l'identità di Eulero per gli stigmareali:

$$
\begin{aligned}
&24.1) \quad e^{\pm i\pi} = -1 \\
&24.2) \quad \pm\, ei\pi = \varsigma 0
\end{aligned}
$$

Possiamo constatare che la 23.2) rispetta le proprietà viste finora degli stigmareali. Infatti:
$a + \varsigma b = a + b \pm i\pi e = \varsigma(a+b)$ e $\varsigma a + \varsigma b = a + b \pm i2\pi e = a + b$. Inoltre, coerentemente con le 22): $\varsigma(\varsigma a) = \varsigma(a \pm i\pi e) = a \pm i2\pi e = a$. Analizzando la 23.2) troviamo che, in analogia alle n radici n-esime di un numero complesso, anche qui ogni stigmareale, e piú in generale ogni numero complesso, ha n quozienti n-esimi: $\varsigma a/n$ corrisponde a n diversi valori con parte reale a/n e parti immaginarie $\pi e/n + 2k\pi e/n$.

Per rendere univoca la 23.2) definiamo come valore principale quello per $k = 0$. D'ora in avanti per semplicità considereremo solo il valore principale. A questo punto la moltiplicazione in E risulta cosí definita:

$$
\begin{aligned}
&25.1) \quad \varsigma a \cdot b = b \cdot \varsigma a = a \cdot b + i\pi eb\ mod\ i2\pi e \\
&25.2) \quad \varsigma a \cdot \varsigma b = \varsigma b \cdot \varsigma a = (a + i\pi e) \cdot (b + i\pi e) = ab - (\pi e)^2 + i\pi e(a+b)\ mod\ i2\pi e
\end{aligned}
$$

Dunque adottando la 23.2) risulta che $\varsigma a \cdot \varsigma b$ è reale se $a + b$ è pari, e stigmareale se $a + b$ è dispari.

Osserviamo che un'idea simile alla 23.2) è stata analizzata da Rubtsov e Romerio in *Progress report on hyper-operations: zeration* (2007), anche se con esiti diversi. L'idea è quella di considerare la formula del logaritmo dell'inverso, e abbassare il grado di alcuni operatori (ma non del logaritmo):

$$
\begin{aligned}
&26.1) \quad ln(x^{-1}) = ln(1/x) = -ln(x) \\
&26.2) \quad ln(x \cdot -1) = ln(0 - x) = \varsigma\ ln(x)
\end{aligned}
$$

Dalla 26.2) deriverebbe $\varsigma a = a + i\pi(2k+1)\ mod\ i2\pi$.

13 Zerazione e pseudoordinamento in $\mathbb{C}$

Possiamo ora provare ad estendere la zerazione (e quindi lo pseudoordinamento) ai complessi. Dati $a, b \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi e)$, le condizioni da soddisfare sono:

$$
\begin{aligned}
&27.1) \quad a + b \succ a \Leftrightarrow a - b \prec a \\
&27.2) \quad a + b \succ a \Leftrightarrow a + b + i\pi e \prec a \\
&27.3) \quad a + t + iv \succ a \Leftrightarrow a - t + ive \prec a
\end{aligned}
$$

La 27.1) serve a mantenere lo pseudoordinamento antisimmetrico. La 27.2) è necessaria per rispettare lo pseudoordinamento su E. La 27.3) è necessaria per $v = \{0, \pi\}$ (visto lo pseudoordinamento su E), ma la estendiamo per ogni v.

Una definizione di zerazione coerente con le proprietà viste finora è la seguente: definiamo dapprima il caso in cui un operando sia $i\pi e/2$:

$$
\begin{array}{llllll}
28) & t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{t+1+iv; t+1+i(v+\pi e)\} & \text{se} & t>0 & et & 0 \le v \le \pi e \\
& t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{t+1+iv; t+1+i(v+\pi e)\} & \text{se} & t<0 & et & \pi e < v < 2\pi e \\
& t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{i\pi e/2+1; 1+i3\pi e/2)\} & \text{se} & t>0 & et & \pi e < v < 2\pi e \\
& t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{i\pi e/2+1; 1+i3\pi e/2)\} & \text{se} & t<0 & et & 0 \le v \le \pi e \\
& t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{t+1+iv; t+1+i(v+\pi e)\} & \text{se} & t=0 & et & 3\pi e/2 \le v < 2\pi e \\
& t+iv \bigtriangledown i\pi e/2 = \{i\pi e/2+1; 1+i3\pi e/2)\} & \text{se} & t=0 & et & (v < \pi e/2 \quad \text{o} \quad v \ge 3\pi/2)
\end{array}
$$

dove il primo elemento tra graffe è il valore principale. Tutti gli altri casi si riconducono alla 28) per traslazione. In pratica, dati due numeri complessi con parti immaginarie in $\mathbb{R}/2\pi e$, si sposti opportunamente la fascia di altezza $i2\pi e$ in modo da centrarla su uno dei due numeri. Con questi valori, se la differenza delle parti immaginarie è minore o uguale a $i\pi e/2$ lo pseudomaggiore è quello con parte reale maggiore, altrimenti il contrario. Se le parti reali sono uguali, lo pseudomaggiore è quello con parte immaginaria maggiore.

Dalla 28) si puó verificare che l'antizerazione è chiusa su $\mathbb{C}$. Si erano introdotti i numeri Stigma perché il Delta non era chiuso su $\mathbb{R}$. Abbiamo quindi reso il Delta chiuso su $\mathbb{R}$, poi su E e ora su $\mathbb{C}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Rubtsov, C. A. - Algorithms ingredients in a set of algebraic operations, Cybernetics 3, pp. 111-112, 1989.

[2] Rubtsov, C. A. - A complement of a set of real numbers and its application in Cybernetics. - Inform. Leaf 306-90, Belgorod. Belgorod CNTI Territorial Interbranch, 1990 (In Russian). (See: http://numbers.newmail.ru/english/05.htm)

[3] Rubtsov, C. A. - A hypothetical reflexive complement of a set of real numbers. Abstract magazine Mathematics. Mathematical cybernetics . - 1990. - 3, p. 52 (In Russian) (See: http://numbers.newmail.ru/english/03.htm)

[4] Rubtsov, K. - Integro-differential objects of a new nature. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM-94). - Zurich, Section: 8, AMS-Classification number: 26 (Short communications). (See: http://numbers.newmail.ru/english/icm94.htm)

[5] Rubtsov, C. A. - New mathematical objects, BelGTASM, Belgorod, Russia; NPP-Informavtosim, Kiev, Ukraine; 1996, Monograph, 251 p. (In Russian). See: http://numbers.newmail.ru/pdf/book.rus.pdf

[6] Rubtsov, C. A. ; Romerio, G. F. -Ackermann s Function and New Arithmetical Operations. Manuscript cited in the bibliography of Stephen Wolfram s A New Kind of Science , 2003. See: http://www.wolframscience.com/reference/bibliography.html see also:

http://www.rotarysaluzzo.it/filePDF...zioni%20(1).pdf .

[7] Rubtsov, K. A. ; Romerio, G. F. - Hyper-operations as a tool for science and engineering. International Congress of Mathematicians (ICM-06): Abstracts, Posters, Short Communications, Mathematical Software, Other Activities, p. 22-23.(See: $texthttp://icm2006.org/AbsDef/Posters/abs_0480.pdf$).

[8] Rubtsov, K. A. ; Romerio, G. F. - Progress Report on Hyper-operations (Zeration), NKS Forum IV, 6th January, 2007