Quest'anno la Finale italiana dei Campionati Internazionali di Giochi Matematici si è svolta in una Milano uggiosa. Appena arrivati nei pressi degli edifici della Bocconi, verso le 14:00, si vedono subito le classiche folle di persone presenti a quest'evento: tantissimi ragazzi delle categorie C1 e C2, con i genitori, gli accompagnatori e poi, mescolati un po' di ragazzi più grandi delle categorie L1 e L2 per poi finire con qualche sparuto vecchietto della categoria GP.
E' il momento, ovviamente, dei rituali saluti di gente conosciuta (o meno) che si vede una o due volte l'anno: come va? Pronto per la gara? Si pazienta un po', si cercano di capire le indicazioni degli organizzatori e poi finalmente si entra!

Tempo per sedersi non ce n'è quasi, infatti per noi vecchietti la gara dura 2:30 h, e quindi bisogna partire il prima possibile; qualche veterano vociferava che essendo un tempo più lungo potrebbe esserci la possibilità di dover fare tutti gli esercizi quest'anno.
Inizia la gara! Innanzitutto una novità gradevole alla vista: il foglio dei testi è tutto a colori. Totale di 20 problemi e ovviamente inizio dal primo, sicuro che bisognerà farli tutti; mai cosa fu più falsa!! Per fortuna me ne accorgo, mentre risolvo il problema numero 8... Mica tanta fortuna, avrei dovuto fare solo quelli dal 9 in poi!
Comunque la gara fila liscia, sembra essere piuttosto facile, un po' di tempo e di prove da spendere sul 17 e sul 20, qualche minuto per capire che per il 19 posso prendere una configurazione che scelgo io e infine trovare il metodo giusto sul 12.
Gli altri sono piuttosto scolastici e infatti si iniziano a vedere le prime persone consegnare dopo solo un'ora e mezza: saranno i vincitori o gente che si è arresa? Beh a giudicare dai nomi delle persone che hanno consegnato (Morandin, Lilliu, Pellegrini, Conti), probabilmente la squadra per Parigi è già uscita dalle aule!!

Finita la gara, si esce e come al solito si controllano tutte le le soluzioni e in effetti si capisce che quasi tutti hanno fatto quasi tutto o sbagliato poco... Per me che ho sbagliato l'ultimo problema ci sono ben poche chance! Si parla anche un po' con i più piccoli e anche lì, tanta gente che ha fatto quasi tutto; probabilmente quest'anno Parigi sarà vinta per minuti e non per problemi (come piacerebbe più a me).
Si pazienta nuovamente, fino all'inzio della cerimonia di premiazione, dove la solita calca si assiepa nell'edificio di via gobbi; effettivamente in categoria GP ci sono 9 persone che hanno fatto en plein, e la classifica inizia proprio con Lilliu, poi Morandin, quindi Pellegrini e Conti. Per le altre classifiche tardomeridiane il ben noto Paolini primo classificato in L2, Re (già Parigino l'anno scorso) primo in categoria L1.
Come al solito valigie, premi, coppe, e in più anche le felpe per i arigini (invidia)!!

Non rimane altro che commentare un po' i testi dei problemi: come già detto in totale la gara è risultata facile (in allegato trovate i le soluzioni numeriche, sperando di non averle sbagliate).
Degni di menzione mi sono sembrati i problemi: 6, 12, 14, 15, 17, 19 e 20. Di questi darò un accenno di soluzione:

6) Vedendo questo problema mi sono sorpreso all'inizio, infatti non riuscivo in nessun modo a far risultare 2012: cercavo di andare per sottrazione di due numeri grandi ma non poteva funzionare, al ché finalmente il colpo di genio, bisognerà sommare due numeri più piccoli e l'unica scelta possibile (chiaramente ci deve essere un numero di 4 cifre) sarà $1234 + 789 = 2023$. Poi aggiustando col 5 e col 6 troviamola soluzione: $1234 - 5 - 6 + 789 = 2012$.
Diciamo che il 2012 è un anno 'fortunato' da questo punto di vista... Quale sarà il prossimo anno

‘fortunato’ per cui potremmo di nuovo trovare questo problema nella finale a Milano? e quale sarà il primo anno ‘fortunato’ dopo il 2050?

12) $abc = (bca + cab)/2$. Proporrò due approcci.
La prima cosa che potrebbe venire in mente è di scrivere in notazione esponenziale cioè

$$100a + 10b + c = (100b + 10c + a + 100c + 10a + b)/2$$

$$189a = 81b + 108c$$

$$21a = 9b + 12c$$

$$7a = 3b + 4c$$

Ora dovremmo essere in grado di risolverlo... Perlomeno per casi! Altrimenti, se vogliamo essere furbi, riscriviamo l’ultima equazione come:

$$3(a - b) = 4(c - a)$$

dunque chiaramente può essere $a = b = c$ ma il testo lo escludeva; chiamamo allora $a - b = h$ e $c - a = k$, e troviamo $3k = 4h$ e quindi h è multiplo di 3. Diciamo allora $h = 3h'$, da cui $k = 4h'$. Inoltre h' può essere solo ± 1, poiché

$$9 \geq |b - c| = |h + k| = 7|h'|.$$

Sostituendo ottengo i due casi:

$$a = b + 3, c = a + 4$$

$$a = b - 3, c = a - 4$$

da cui facilmente trovo le 4 soluzioni.

Il secondo approccio è un po’ meno pulito, quindi sarò più approssimativo. L’idea è semplicemente di guardare all’ultima cifra dell’uguaglianza

$$abc + abc = bca + cab$$

e capire che si è in uno di questi casi (a seconda dei riporti):

$$2c = a + b + 10$$

$$2c = a + b - 10$$

$$2c = a + b.$$

Similmente, guardando la cifra delle centinaia:

$$2a = b + c + 1$$

$$2a = b + c - 1$$

$$2a = b + c;$$

poi si cerca semplicemente di combinare queste possibilità per giungere come prima alle due situazioni

$$a = b + 3, c = a + 4$$

$$a = b - 3, c = a - 4$$

Nota a margine: perché come quasi in ogni gara, anche questa volta c'era qualcosa di poco chiaro: nel testo si parlava di UN numero mentre nella soluzione ce ne volevano 4, tra l'altro non separati dalle classiche virgole, e quindi molte persone trovata una soluzione poi hanno cambiato esercizio, pensando di aver finito...

13) La geometria euclidea è sempre molto carina, e la figura a volte aiuta molto, come in questo caso... era essenziale notare che i due segmenti interni sono perpendicolari (i due triangoli grandi si ottengono uno dall'altro per una rotazione di 90 gradi) e quindi il triangolino in alto a sinistra è simile a quelli grandi... Da qui è tutto in discesa con similitudini di vario tipo.

14) Anche questo non è male, anche se è un po' un classico. Come d'uopo le velocità v_1 e v_2 delle due barche, l la larghezza del canale, allora la prima informazione è che

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3,5}{l - 3,5}$$

per la seconda informazione conviene pensare: dall'inizio quanti km hanno percorso le barche prima di incontrarsi la seconda volta? entrambe hanno toccato la sponda e quindi hanno percorso almeno l km e successivamente una ha percorso 2 e l'altra $l - 2$. Ma chi avrà percorso cosa? Naturalmente quella che stava a distanza $3,5$ dalla sponda nord poi si troverà a 2 dalla sponda sud e quindi il barcone 1 avrà percorso $l + 2$ mentre l'altro $2l - 2$:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l + 1}{2l - 2}.$$

Uguagliando le due equazioni si ottiene che $l = 8,5$.

17) Ma saranno piccolissimi a, b e c - ho pensato subito... E invece... Si tratta di matematizzare il problema, abbiamo $a, b, c > 0$, diversi, tali che

$$\begin{cases} a + b &= x^2 \\ b + c &= y^2 \\ c + a &= z^2. \end{cases}$$

Per minimizzare $s = a + b + c$, basta minimizzare $x^2 + y^2 + z^2$ (che è uguale a $2s$), quindi basterà mettere $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e risolvere... Ahia, piccolo problema: in questo modo però mi viene $a = 3$, $b = -2$, $c = 6$ e non va bene, devono essere tutti positivi. Ah ma mi sono scordato di imporre che a, b, c vengano positivi... Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a = & (x^2 + z^2 - y^2)/2 \\ b = & (x^2 + y^2 - z^2)/2 \\ c = & (y^2 + z^2 - x^2)/2 \end{cases}$$

Innanzitutto $a < b < c$ se e solo se $x < z < y$, inoltre la condizione di positività sarà $x^2 + z^2 > y^2$ (ci basta imporlo per a). Ma c'è anche un'altra condizione: c'è la divisione per due da fare e quindi ho bisogno anche che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un numero pari e quindi devono essere due dispari e un pari o tutti pari.
Ora un po' di spazio alle prove: la minima terna con tutti pari si verifica essere $8, 10, 12$ ed è un po' altina, mentre se voglio due dispari e un pari la terna minima è $(x, z, y) = (5, 6, 7)$ che in effetti è quella giusta, e dà come risultato $(a, b, c) = (6, 19, 30)$.

19) Come ho già detto, dopo aver fissato il problema per un po' ci si chiede: ma se mi chiede un solo numero, allora qualsiasi procedimento faccio viene sempre lo stesso? Allora faccio un caso comodo: all'inizio ho un mucchio da 2011 e uno da 1. Poi ogni volta dal mucchio grande levo una pietra e quindi le configurazioni che mi trovo saranno:

2011 1

2010 1 1

2009 1 1 1

2008 1 1 1 1

......

1 1 1 1 ... 1

dove all'ultimo passo ho 2012 uni. I prodotti chiaramente sono 2011, 2010, 2009, ... ,3,2,1 e quindi la somma totale è il 2011° numero triangolare, cioé $2012 * 2011/2 = 2023066$.

20) un insolito giochino tipo sudoku, che ha occupato la maggior parte del tempo per tanti partecipanti. Vi do un consiglio: dove può andare l'1, dove il 6? Altro suggerimento: tenete conto che tra i due posti dove mettete due numeri uguali, le caselle adiacenti devono essere disgiunte e confinare con 5 caselle in totale.